УДК 517.9; 528.21; 550.831

Ю. І. Дубовенко

Задача Алексідзе для відновлення потенціалу сили тяжіння

(Представлено академіком НАН України В.І. Старостенком)

Сформульована нова нелінійна гранична задача гравіметрії, названа задачею Алексідзе. В постановці А.В. Чорного вона зводиться до задачі відновлення потенціалу сили тяжіння за значеннями модуля його градієнта на границі Ляпунова. Розглянуті деякі аналітичні властивості задачі. Її розв'язок у вигляді потенціалу простого шару є послідовністю розвязкі зовнішніх граничних задач Неймана для рівняння Лапласа за умови, що розв'язок не дуже відхиляється від заданого. Густина простого шару визначається з розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду для сили тяжіння.

A new nonlinear gravimetric boundary problem, namely an Alexidze problem is stated. It is treated by A. Chornii as a problem of gravity potential renovation by the values of modulus of its gradients given on Liapunov's boundary. The problem's analytical properties are considered. Its solution as a simple layer potential consists of the sequence solutions of external boundary Neumann's problems for Laplace's equation provided that the solution not greatly deviated from the given one. A simple layer density is defined by the solution of 2-nd kind Fredholm integral equation for gravity.

Однією з непересічних проблем тлумачення даних аномалій потенціальних полів є створення надійної методики для побудови на їх основі адекватних вимогам сьогодення і геологічно змістовних моделей глибинної будови земної кори. Крім того, вирішення окремих прикладних завдань гравіметрії і геодезії, пов'язаних з вивченням фігури, внутрішньої будови Землі, чи проявів її зовнішнього гравітаційного поля, потребує відомостей про розподіл значень потенціалу сили тяжіння чи модуля його градієнта. Для вирішення цих завдань накопичено достатньо геофізичних даних, проте недостатньою мірою розвинуті методи видобутку з них всієї повноти необхідної інформації. Наявні методи трансформації потенціальних полів [1, 2] довершують теорію потенціалу і є інформативними у вивченні внутрішньої будови планети. Однак вони дають змогу розв'язувати з достатньою точністю ту чи іншу задачу лише за умови задання вхідної інформації в локальних областях певної малої міри. Спроби стикувати результати локальних розв'язків при відновленні інформації в глобальному масштабі зазнають невдачі [3] через відсутність точних граничних даних для розв'язання відповідних граничних задач – Діріхле, Неймана, Стокса-Молоденського – для рівняння Лапласа. Наразі немає змоги й прямо вимірювати значення гравітаційного потенціалу, однак доступні дані гравімагнітних спостережень, що являють собою значення приростів модуля градієнта потенціалу сили тяжіння (МГПСТ). Варто скористатися цими даними при розробці схем трансформацій потенціалу в глобальній області.

Серед трансформацій потенціальних полів чільне місце посідає задача наближеного аналітичного продовження потенціалу сили тяжіння: в моделі геологічного середовища наближено задано або диференціальний оператор, або граничні умови. На практиці найчастіше для вирішення цього завдання використовують модель з точним диференціальним оператором (гармонічна апроксимація значень сили тяжіння $g_н(x)$) в задачі Молоденського [4]. Відновити з гарантованою точністю поле сили тяжіння у зовнішньому просторі за його гармонічним наближенням можна шляхом розв'язання відповідної граничної задачі в області малої міри, оскільки у вищезгаданих граничних задачах дані спостережень слугують лише наближеними граничними умовами через негармонічність відповідних функцій. Через негармонічність оператора трансформанти [5] (принаймні, на суходолі) різко зростає похибка визначення потенціалу $g_н(x)$ зі збільшенням розміру локальної області. Відтак, трансформації на основі цих задач мають гарантовану точність лише в областях малої міри (як правило, $1^o \times 1^o$ і з точністю до невизначеної сталої, що залежить від геометрії цієї області). Отже, гарантована точність розв'язку суттєво залежить від геометрії (рельєфу і розмірів) локальної області [6], а критерії для поєднання локальних розв'язків в глобальних побудовах відсутні.

Крім того, в класичному способі визначення гравіаномалій $g_н(x)$ не враховується та обставина, що в точках земної поверхні вектори реальної і нормальної сили тяжіння можуть ма-

ти *різні напрями* через розходження поверхні земного рельєфу та референц-еліпсоїда (рис. 1), що особливо яскраво проявляється на стику континент-океан та в гірських районах. Просторову орієнтацію гравіметрів (нахили приладів, зумовлені різним ступенем кривизни еквіпотенціальних поверхонь, що проходять через задані пункти вимірювань) характеризує приріст кута $\alpha_i = \cos(n_i, m_i) - \cos(n_{i+1}, m_{i+1})$ між нормалями до земної та еквіпотенціальної поверхонь в точці вимірювань.

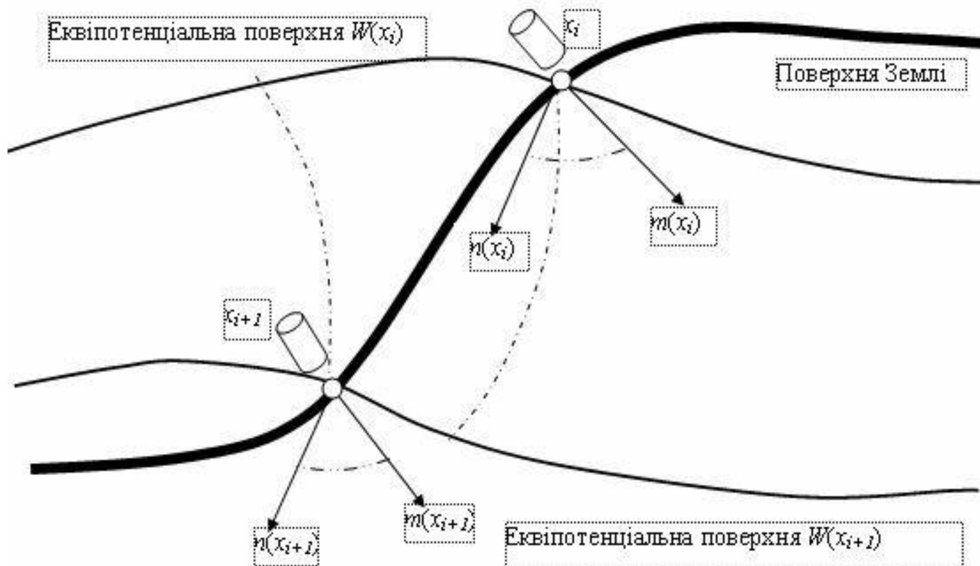


Рис. 1. Розходження векторів реальної і нормальної сили тяжіння.

Ні цю, ані жодну іншу величину, скажімо, значення напрямних косинусів $\cos(n, x_i),\ i = \overline{1,3}$, що визначають напрям сили тяжіння, не вимірюють через складність організації таких спостережень в польових умовах. Розходження[1] (приріст) цих напрямів в реальних умовах коливається від 0" до 40" і може призвести до того, що глибинні неоднорідності, які зумовлюють ці розходження, не відображатимуться в класичних аномаліях. Необхідність вивчення нелінійної граничної задачі відновлення потенціалу сили тяжіння за значеннями модуля його градієнта продиктована практичною непридатністю класичних схем відновлення потенціалу в глобальній області.

В зв'язку з переходом до глобальних побудов густинних моделей земної кори, які виконуються на основі даних регіональних спостережень, виникла потреба в пошуку способів розв'язання задачі аналітичного продовження аномалій сили тяжіння, сформульованої в [3]. В цьому напрямі в праці [6] виокремлено два альтернативні напрямки, що базуються на аналізі характеристичних властивостей модуля градієнта потенціалу сили тяжіння.

Перший з них потребує відшукання такого диференціального оператора, що анулює значення модуля градієнта потенціалу поза областю розташування тяжіючих мас, та розв'язання для цього оператора відповідної лінійної граничної задачі. Результатом аналізу цього підходу є постановка і розв'язання зовнішньої задачі Діріхле для *лінійного* диференціального рівняння типу Гельмгольца (яке моделює значення МГПСТ в області, не зайнятій тяжіючими масами) з невідомим змінним коефіцієнтом, що відповідає обраному нормальному потенціалу. Подібному ж рівнянню задовольняють і аномалії сили тяжіння [5]. Цей спосіб ефективний для продовження аномалій сили тяжіння, однак у випадку продовження значень повного градієнта потенціалу не дає бажаних наслідків. В [3] обґрунтована і реалізована подібна схема у вигляді послідовності розв'язків задачі Неймана для рівняння Лапласа, які визначають збурювальний потенціал.

Другий шлях лежить в площині постановки такої *нелінійної* граничної задачі для рівняння Лапласа, в крайових умовах якої безпосередньо задіяні значення сили тяжіння. Таку задачу вперше сформулював Алексідзе в роботі [3], а в [6] її переформульовано з граничними да-

[1] Розбіжність напрямків векторів реальної і нормальної сили тяжіння в точках складного рельєфу коливається до кількох десятків секунд і може „приховати" аномалії в сотні мГал [7].

ними для класу поверхонь Ляпунова за умови, що відновлюваний потенціал не дуже відхиляється від заданого.

Відтак, для пошуку точніших способів відновлення наближень сили тяжіння довелось вийти за рамки задачі Діріхле і відшукувати уточнення коефіцієнта рівняння, первісно обчисленого для нормального потенціалу, що призвело до побудови послідовних наближень потенціалу за граничними значеннями модуля його градієнта. Перехід до задачі відновлення потенціалу усунув необхідність обчислення наступних наближень як коефіцієнтів рівняння сили тяжіння, так і самих значень сили тяжіння, оскільки останні тепер можна знайти не лише з розв’язання задачі Діріхле для рівняння сили тяжіння, а і (що простіше) з безпосереднього диференціювання відновленого потенціалу.

У зв’язку з цим задача відновлення потенціалу за значеннями МГПСТ, яка не належить до класичних задач гравіметрії, набуває особливої ваги в колі обернених задач теорії потенціалу. Один з можливих способів її вирішення розроблений в праці [7], а інший, під назвою „гранична задача Алексідзе для рівняння Лапласа”, пропонуємо вашій увазі. Уточнімо постановку цієї задачі [8].

За предметну модель задачі відновлення потенціалу за модулем його градієнта приймемо просту модель Землі як абсолютно твердого тіла, близького до тіла обертання, що рухається рівномірно вздовж орбіти, обертаючись навколо осі з постійною кутовою швидкістю (без прецесії і нутації). Нехай y^- – обмежена область точок тривимірного евклідового простору, зайнята масами Землі, y^+ – необмежене доповнення до y^-, вільне від гравітуючих об’єктів, ∂y – границя множин y^- і y^+, що ототожнена з фізичною поверхнею Землі. В прямокутній декартовій системі координат $Ox_1x_2x_3$ з початком у центрі Землі, осі Ox_1, Ox_2 лежать в екваторіальній площині, а вісь Ox_3 співпадає з віссю її обертання. Точки області y^- позначмо грецькими літерами, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in y^-$, а її доповнення y^+ – латинськими $x = (x_1, x_2, x_3) \in y^+$. Маси всередині Землі $M(\xi)$ $\xi \in y^-$ з густиною $dM(\xi) = \sigma(\xi) d\xi$ генерують у навколишньому просторі поле сили тяжіння, що матиме потенціал

$$W(x) = f \int_{y^-} \frac{\sigma(\xi)}{|x - \xi|} d\xi + \begin{cases} \Omega(x), & x \in y^- \\ 0, & x \in y^+ \end{cases}, \quad (1)$$

де f – гравітаційна стала, $\Omega(x) = 0.5\omega^2(x_1 + x_2)$ – потенціал центробіжної сили, ω – модуль вектора кутової швидкості Землі. Напруженість поля (значення модуля градієнта потенціалу за [4]) дорівнює

$$g(x) = |-\nabla W(x)| = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial W(x)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k(x)}{\partial n} = (\bar{g}(x), \bar{n}(x)), \quad (2)$$

де $\frac{\partial x_k(x)}{\partial n} = \cos(n, x_k),\ k = 1,2,3$ – напрямні косинуси одиничного вектора $\bar{n}(x)$ внутрішньої нормалі до еквіпотенціальної поверхні $dW(x)$: $W(y) = Cx$, яка проходить через точку x.

Конкретизуймо постановку задачі: необхідно знайти функцію $W(x),\ x \in y^+$, яка задовільняє всередині необмеженої замкнутої області $\bar{y}^+ = y^+ \cup \partial y$ рівнянню Лапласа $\Delta W(x) = 0,\ x \in y^+$, якщо в будь-якій точці ляпуновської границі ∂y області і в нескінченно віддаленій точці вона задовільняє умовам: $\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial W(x)}{\partial x_k} \right)^2 = g^2(x),\ x \in \partial y,\ W(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, де $g(x)$ – задана неперервна функція. Називатимемо надалі цю *нелінійну* граничну задачу „задачею Алексідзе для рівняння Лапласа”.

Проаналізуймо аналітичні особливості функції $g(x)$ модуля градієнта потенціалу; однією з її найважливіших характеристик є наступне твердження [10].

Модудь градієнта потенціалу сили тяжіння не задовольняє рівнянню Лапласа в жод-

ній точці області y^+, що випливає з подання (2) і є наслідком наступної леми.

Лема. Добуток $w(x)=u(x)\cdot v(x)$ двох функцій $u(x)$ і $v(x)$, $x\in y^-$ класу $C^{(2)}(y^-)$ гармонічний в області y^- тоді і лише тоді, коли кожний із співмножників гармонічний в y^-, а їхні градієнти $\nabla u(x)$ і $\nabla v(x)$ ортогональні один одному в області y^-.

Доведення очевидно випливає з рівності

$$\nabla^2 w(x)=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial W(x)}{\partial x_k^2}=v(x)\cdot\nabla^2 u(x)+2\langle\nabla u(x),\,\nabla v(x)\rangle+u(x)\cdot\nabla^2 v(x).$$

Кожна зі складових градієнта $u(x)=\dfrac{\partial W(x)}{\partial x_k}$ є гармонічною функцією, а функції $v(x)=\cos(n,x_k),\ k=1,2,3$ – ні, в чому легко переконуємося з безпосереднього обчислення.

Якби на поверхні Землі (рівняння якої вважаємо заданим), крім значень модуля градієнта потенціалу $g(x),\ x\in\partial y$ і внутрішньої нормалі $\overline{m}(x)$ до ∂y, вимірювали напрямок градієнта $\overline{n}(x)$, задача відновлення потенціалу сили тяжіння звелась би до визначення потенціалу притяжіння $V(x),\ x\in y^+$ як розв'язку зовнішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа

$$\nabla^2 V(x)=0,\ x\in y^+,\ \frac{\partial V(x)}{\partial m}=\Phi(x),\ x\in\partial y,\ V(x)\to 0,\ |x|\to\infty, \tag{3}$$

де $\Phi(x)=\dfrac{\partial W(x)}{\partial m}-\dfrac{\partial\Omega(x)}{\partial m}=g(x)\cos^2(n,m)-\omega^2\sum\limits_{k=1}^{3}c,\ \cos(n,m)=\sum\limits_{k=1}^{3}\cos(n,x_k)\cos(x_k,m).$

Однак напрямок нормалі $\overline{n}(x)$ (рис.1) невідомий через виняткову складність і вартість вимірювань. Граничні дані задачі відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта $q(x)=|-\nabla V(x)|$, у рамках прийнятої моделі описує вираз [6]

$$q^2(x)=q^2(x)\left\{1-2q^{-1}(x)\sum_{k=1}^{2}\cos(n,x_k)\frac{\partial\Omega(x)}{\partial x_k}+q^{-2}(x)\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial\Omega(x)}{\partial x_k}\right)^2\right\},$$

або $q_i(x)=q_{i-1}(x)\left\{\sum\limits_{k=1}^{2}\left[\cos(n,x_k)-q^{-1}(x)\dfrac{\partial\Omega(x)}{\partial x_k}\right]^2\right\},$ (4)

через те, що $\dfrac{\partial\Omega(x)}{\partial x_3}=0$. Зробімо деякі припущення.

Введімо нормальний потенціал, що генерується фіктивними масами, що дорівнюють масам в y^-, але розташовані в певному сенсі "нормально" в деякій іншій області y_0 простої геометрії з границею ∂y_0, яка не дуже відхиляється від земної поверхні ∂y. Подаймо потенціал притяжіння у вигляді суми $V(x)=U(x)+T(x)$ нормального $U(x)$ і збурювального $T(x)$ потенціалів, завдяки чому збурювальний потенціал описує відхилення реального розподілу мас в y^- від нормального. Нехай $\vec{v}(x)$ – одинична внутрішня нормаль до поверхні $\partial U_x: U(y)=C_x$, а $\gamma(x)=|-\nabla U(x)|$ – модуль градієнта нормального потенціалу. Вважаємо заданими напрямні косинуси $\cos(\nu,x_k)$, $\cos(x_k,m)$ внутрішніх нормалей $\vec{v}(x)$, $\overline{m}(x)$ до поверхонь ∂U_x і ∂y, а разом з ними і $\cos(\nu,m)=\sum\limits_{k=1}^{3}\cos(\nu,x_k)\cos(x_k,m).$

За таких припущень відновити потенціал притяжіння $V(x),\ x\in y^+$ можна з граничної задачі (3) шляхом обчислення послідовних наближень $V^{(k)}(x),\ k=0,1,2,...,\infty$: за знайденими з попереднього i-го кроку наближеннями $\cos(n_i,x_k),\ k=1,2,3$ напрямних косинусів нормалі $\overline{n}(x)$ визначаємо на границі ∂y за формулою (4) $i+1$-ше наближення сили тяжіння [7]

$$q_{i+1}^2(x)=g(x)\left(\sum_{k=1}^{2}\left[\cos(n_i,x_k)-q_i^{-1}(x)\frac{\partial\Omega(x)}{\partial x_k}\right]\right)^{-1/2},\ x\in\partial y,$$

$$\cos(n_i,m)=\sum_{k=1}^{3}\cos(n_i,x_k)\cos(x_k,m),\ x\in\partial y,\ \varPhi_{i+1}(x)=q_{i+1}(x)\cos(n_i,m)=\gamma(x)\cos(\nu,m),\ x\in\partial y.$$

Після цього залишилось знайти розв'язок зовнішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа

$$\Delta T_{i+1}(x)=0,\ x\in y^+,\ \frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial m}=\varPhi_{i+1}(x),\ x\in\partial y,\ T_{i+1}(x)\to 0,\ |x|\to\infty, \qquad (5)$$

як потенціал простого шару мас неперервної густини $\delta_{i+1}(x),\ x\in\partial y$, розподілених з на поверхні ∂y

$$T_{i+1}(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial y}\frac{\delta_{i+1}(\xi)}{|x-\xi|}dS_\xi,\ x\in y^+. \qquad (6)$$

Невідому густину обчислюємо з нелінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду [6]:

$$\delta_{i+1}(x)+\int_{\partial y}K(x,\xi)\delta_{i+1}(\xi)dS_\xi=2\varPhi_{i+1}(x),\ x\in\partial y, \qquad (7)$$

де $K(x,\xi)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial m_x}\frac{1}{|x-\xi|}=-\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(u,m)}{|x-\xi|}$, $\cos(u,m)=\sum_{k=1}^{3}\cos(m,x_i)\frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|}$, $u=x-\xi$.

Розв'язавши рівняння (7), наближено обчислимо з використанням (6) похідні потенціалу притягання

$$V_j^{(i+1)}(x)=\frac{\partial V^{(i+1)}(x)}{\partial x_j}=\frac{\partial U(x)}{\partial x_j}+\frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial x_j},\ \frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial x_j}=-\frac{1}{4\pi}\frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|^3}\delta_{i+1}(\xi)dS_\xi,\ j=1,2,3. \qquad (8)$$

Із виразу (8) очевидно, що похідні наближень збурювального потенціалу визначаються у внутрішніх точках області y^+, а на її границі ∂y значення похідних з (8) знайти неможливо через наявність у підінтегральних функціях сильних неінтегровних особливостей. Для продовження обчислень слід знати значення похідних збурювального потенціалу саме на границі ∂y, і для їх обчислення слід передбачити спеціальну регуляризацію інтегралів (8). Припустимо, що таку операцію виконано і значення похідних (8) знайдені в точках $x\in\partial y$, тоді обчислимо наступні наближення

$$\cos(n_{i+1},x_k)=q_{i+1}^{-1}(x)V_k^{(i+1)}(x),\ x\in\partial y,\ q_{i+2}^2(x)=g(x)\left\{\sum_{k=1}^{3}\left[\cos(n_{i+1},x_k)-q_{i+1}^{-1}(x)\frac{\partial\Omega(x)}{\partial x}\right]^2\right\}^{-1/2},\ x\in\partial y,$$

$$\varPhi_{i+2}(x)=q_{i+2}(x)\cos(n_{i+1},m)=\gamma(x)\cos(\nu,m),\ x\in\partial y,$$

після чого знову розв'язуємо граничну задачу (5)-(7), наростивши індекс $i+1$-го наближення збурювального потенціалу $T_{i+1}(x)$ і наближення $V^{(i+1)}(x)=U(x)+T_{i+2}(x)$ потенціалу притяжіння і т.д.

Строге обгрунтування заміни коректної задачі (5) розв'язком граничної задачі (6)-(7) і збіжності наближень $V^{(k)}(x)$ до потенціалу притяжіння $V(x),\ x\in y^+$ дано на прикладі близької задачі [4]. Однозначність її розв'язку доводиться теоремою єдиності розв'язання задачі Неймана для рівняння Лапласа за модулем його градієнта за допомогою потенціалу простого шару, що зводиться до доведення збіжності обчислюваних наближень $V^{(k)}(x),\ k=0,1,2,...,\infty$ функції $V(x),\ x\in y^+$. А її, в свою чергу, легко довести, якщо виявити збіжність послідовності $\{T_k(x)\}$ наближень збурювального потенціалу: якщо $T_k(x)$ збігається до $T(x)$ при $k\to\infty$, звідси випливає не лише збіжність $V^{(k)}(x)\to V(x),\ x\in y^+$, але і збіжність до своїх границь будь-яких інших наближень, що однозначно визначаються за $T_k(x)$.

Надалі визначимо величину $\varepsilon^2(x)=\dfrac{|\nabla T(x)|^2}{|\nabla U(x)|^2}$ як квадрат відношення модулів градієнтів збурювального та нормального потенціалу. Тоді справедлива наступна теорема [9].

Теорема 1. Якщо величиною $\varepsilon^2(x)$ можна знехтувати порівняно з $\varepsilon(x)$, то послідовність розв'язків $\{T_k(x)\}$ граничних задач (5) збігається до збурювального потенціалу $T(x)$ області y^-.

Доведення. Досить довести збіжність послідовності $\{\delta_k(x)\}$, з якої, згідно (6), випливає збіжність $\{T_k(x)\}$. Оператор $A\delta_i=\delta_i(x)+\int\limits_{\partial y}K(x,\xi)\delta_i(\xi)dS_\xi$ рівняння (7) за теоремою існування розв’язку має обмежений обернений оператор A^{-1}, $\|A^{-1}\|\le c<\infty$, звідки очевидною є оцінка $\|\delta_{i+1}(x)-\delta_i(x)\|\le 2c\|\Phi_{i+1}(x)-\Phi_i(x)\|$, а з урахуванням визначення функцій $\Phi_i(x)$ маємо

$$\|\delta_{i+1}(x)-\delta_i(x)\|\le 2c\|q_{i+1}(x)\|\|\cos(n_i,m)-\cos(n_{i-1},m)\|+2c\|\cos(n_{i-1},m)\|\|q_{i+1}(x)-q_i(x)\|.$$

Першим доданком у правій частині цієї нерівності можна знехтувати. Дійсно, оскільки

$$q_i^2(x)=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial U(x)}{\partial x_k}+\frac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial x_k}\right)^2=\gamma^2(x)+2\gamma(x)\frac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial\nu}+|\nabla T_{i-1}(x)|^2,$$

то, переписавши вираз для градієнта функції $T_{i-1}(x)$ з урахуванням очевидного співвідношення

$\dfrac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial\nu}=q_i(x)\cos(n_{i-1},\nu)-\gamma(x)$, отримуємо $q_i^2(x)=\left(\gamma(x)+\dfrac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial\nu}\right)^2-q_i^2(x)\sin^2(n_i,\nu)$.

Однак $\cos(n_{i-1},\nu)=\sum\limits_{k=1}^{3}\cos(n_{i-1},x_k)\cos(x_k\nu)=1-\gamma^{-2}(x)\left[\dfrac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial\nu}\right]^2$, тобто кут $\cos(n_{i-1},\nu)$ за умов теореми малий, і попередній вираз із точністю до $\varepsilon^2(x)$ набуває вигляду

$$q_i^2(x)=\gamma(x)\left(1+\gamma^{-1}(x)\left[\frac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial\nu}\right]^2\right)\qquad(9)$$

Оскільки з означення з урахуванням наближеної рівності (9) маємо

$$\cos(n_i,m)=q_i^2(x)\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial U(x)}{\partial x_k}+\frac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial x_k}\right)\cos(x_k,m)=\cos(\nu,m)=\left\{1-\gamma^{-2}(x)\left[\frac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial\nu}\right]^2\right\},\qquad(10)$$

то, очевидно, що різниця $\cos(n_i,m)-\cos(n_{i-1},m)$ за порядком не перевершує числа $\varepsilon^2(x)$. На основі (9) і з урахуванням граничної умови задачі (5) матимемо

$$q_{i+1}(x)-q_i(x)=\cos(\nu,m)[q_i(x)\cos(n_{i-1},m)-q_{i-1}(x)\cos(n_{i-2},m)],$$

звідки, врахувавши умову теореми та рівність (10), одержуємо наступний ланцюжок нерівностей

$$\|q_{i+1}(x)-q_i(x)\|\le\|\cos(\nu,m)\|^2\|q_i(x)-q_{i-1}(x)\|\le$$
$$\le\|\cos(\nu,m)\|^4\|q_{i-1}(x)-q_{i-2}(x)\|\le\ldots\le\|\cos(\nu,m)\|^{2i}\|q_1(x)-q_0(x)\|.$$

Остаточно матимемо нерівність $\|\delta_{i+1}(x)-\delta_i(x)\|\le 2c\|\cos(\nu,m)\|^{2i+1}\|q_1(x)-q_0(x)\|$, яка переконує, що послідовність $\{\delta_k(x)\}$ швидко збігається в собі за умови $\|\cos(\nu,m)\|<1$; зі збіжності $\{\delta_k(x)\}$ в собі легко встановити збіжність до єдиної границі $\delta(x)$. За умови $\|\cos(\nu,m)\|=1$ (напрямок внутрішньої нормалі $\nu(x)$ до еквіпотенціальної поверхні ∂U_x збігається (або протилежний) з напрямком нормалі $\overline{m}(x)$ до поверхні Землі ∂y) задача зводиться до зовнішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа.

Поширити формули (8), справедливі для внутрішніх точок області y^+, на граничні точки $x \in \partial y$ допоможе наступне твердження.

Теорема 2. Якщо густина потенціалу простого шару (6) – неперервна на границі ∂y функція, граничні значення частинних похідних 1-го порядку від потенціалу дорівнюють

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial y} \frac{x_k - \xi_k}{|x - \xi|} \delta(\xi) dS_\xi + \frac{1}{2} \delta(x) \cos(x_k, m_x).$$

Доведення теореми випливає негайно із зображення потенціалу у вигляді

$$T(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial y} [\delta(\xi) - \delta(x)] \frac{dS_\xi}{|x - \xi|} + \frac{\delta(x)}{4\pi} \int_{\partial y} \frac{dS_\xi}{|x - \xi|},$$

якщо диференціювання по x_k тимчасово замінити диференціюванням по внутрішній нормалі m_x до поверхні ∂y у точці x_i і врахувати відому тотожність

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial m_x} \frac{1}{|x - \xi|} dS_\xi = \begin{cases} 1, & x \in y \\ 0.5, & x \in y^+ \\ 0, & x \in y^- \end{cases}.$$

Індекси, якими у (8) описано послідовність граничних задач, при обчисленні похідних опущені, як несуттєві. Вказана в теоремі 2 формула непридатна для практичного обчислення похідних (через складність земного рельєфу), тому замість неї варто використовувати еквівалентну формулу

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x_k} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial y} [\delta(\xi) - \delta(x)] \frac{x_k - \xi_k}{|x - \xi|} dS_\xi + \frac{1}{2} \delta(x) \cos(x_k, m_x).$$

Зауваження: останнє рівняння, як і попередні, що фігурують в теоремах 1 і 2, нелінійні; однак, якщо зафіксувати геометрію контактної поверхні $\partial y(y)$, що задана на класі Ляпунова $C^{(2)}(y^-)$, то задача знаходження густини потенціалу простого шару стає лінійною і матиме однозначне розв’язання.

Відтак, сформульована нова нелінійна гранична задача Алексідзе для відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта і вказана послідовність її розв’язку у вигляді потенціалу простого шару (6), густину якого відшукують з рівняння (7). Надалі потрібно обґрунтувати коректність постановки цієї задачі з граничними даними на ляпуновському класі $C^{(2)}(y^-)$.

Автор висловлює подяку академіку В.І. Старостенку за плідні зауваження й поради, що сприяли поліпшенню рукопису статті.

1. Гравиразведка: Справочник геофизика / Под ред. Е.А. Мудрецовой, К.Е. Веселова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1990. – 607 с.
2. *Веселов К.Е.* Гравиметрическая сьемка. – М.: Недра, 1986. – 312 с.
3. *Алексидзе М.А.* Редукция силы тяжести. – Тб.: Мецниереба, 1965. – 256 с.
4. *Пантелеев В.Л.* Физика Земли и планет. Курс лекций. – М.: Изд-во МГУ, 2001. – 260 с.
5. *Черный А.В.* Описание гравитационных аномалий // Докл. АН УССР. Сер. Б. – 1982, № 4. – С. 18-21.
6. *Черный А.В.* Избранные задачи гравиметрии и гравиразведки и методы их решения: Дис… д. ф.-м.н.: 04.00.22 / К.: ИГФ НАНУ, 1991. – 429 с.
7. *Якимчик А.І.* Гранична задача відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта: Автореф. дис... канд..ф.-м.н.: 04.00.22 / К. ІГФ НАНУ, 2001. – 16 с.
8. *Дубовенко Ю.І.* Спосіб відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта: Матер. наук. конф. „Геофізичні технології прогнозування та моніторингу геологічного середовища”, Львів, 6-10 жовтня 2008 р. – Львів: Вид-во „Сполом”, 2008. – С. 156-158.
9. *Чорний А.В.* Про нову задачу для рівняння Лапласа // Вісник Київського університету. Сер. Геологія. – 1995. – Вип. 13. – С. 72-80.
10. *Алексидзе М.А.* Решение некоторых основных задач гравиметрии. – Тб.: Мецниереба, 1985. – 412 с.

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 30.03.2009